Математичка гимназија

Београд

Матурски рад

из физике

Аналогије између електричних кола и цевовода

Ментор: проф. Драгица Ивковић

Ученик: Мина Милићев, IV-а

С А Д Р Ж А Ј

Страна

1. УВОД

У физици нису ретке аналогије између физичких величина и једначина које описују различите физичке појаве. Аналогијама овде сматрамо бијективна пресликавања физичких величина које учествују у једначинама истих математичких облика које описују потпуно различите појаве. Уочавање аналогија може помоћи у лакшем разумевању и решавању неког проблема преко величина и једначина аналогних онима из задатог проблема.

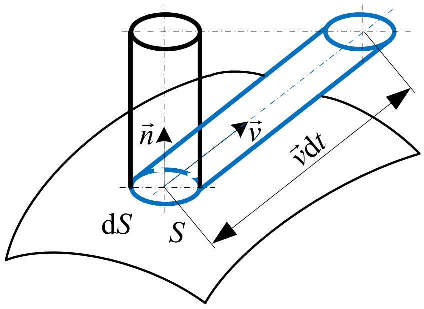
Интуитивно је јасно да постоје сличности између кретања и понашања флуида (флуидних делића) и наелектрисаних честица у електричном пољу, па тако и између физичких величина које их описују [1]. Управо због те интуитивне сличности, у обе области се то кретање флуидних делића односно наелектрисаних честица назива струјање. Овакво интуитивно очекивање се може формално доказати преко сличности математичких једначина које те физичке величине описују, што ће и бити тема овог рада.

После овог увода, овај рад садржи четири поглавља и закључак. У првом поглављу се изводе аналогије које важе у пољима – аналогије између количине наелектрисања и запремине, јачине струје и запреминског протока, као и једначина континуитета која важи и у струјном пољу нестишљивог флуида и у електромагнетном пољу. У другом поглављу доказују се аналогије које важе у електричним колима односно цевоводима. Треће поглавље приказује аналогне елементе из електричног кола и цевовода. У последњем поглављу дато је неколико примера аналогних електричних кола и цевовода и њиховог решавања. Рад се завршава закључком.

2. АНАЛОГИЈЕ ИЗМЕЂУ ФИЗИЧКИХ ВЕЛИЧИНА И ЈЕДНАЧИНА У ПОЉУ

2.1. Запремина, запремински проток, наелектрисање и струја

Посматрајмо нестишљив флуид који протиче брзином $\vec{v}$ кроз простор и неку површину S у простору (Слика 1).



Слика 1

Вектор $\vec{v}$ је вектор брзине флуида који протиче кроз бесконачно малу површ $\mathrm{d}S$, а $\vec{n}$ је вектор нормале те површи. Запремина флуида који за време $\mathrm{d}t$ прође кроз елементарну површ $\mathrm{d}S$ је запремина косог ваљка са слике. Та запремина једнака је запремини нормалног ваљка исте висине:

$$\mathrm{d}V = (\vec{v}\,\mathrm{d}t)\,\vec{n}\,\mathrm{d}S.$$

Онда је запремина флуида који за време $\mathrm{d}t$ прође кроз површ S је:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}t\,\int_S \vec{v}\,\vec{n}\,\mathrm{d}S.$$

Тако је запремински проток једнак флуксу вектора брзине:

$$\dot{V} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \int_S \vec{v}\,\vec{n}\,\mathrm{d}S. \tag{1}$$

Посматрајмо сада проток носилаца наелектрисања (наелектрисаних честица, односно електрона или јона) у простору. Густина струје $\vec{J}$ је физичка величина која макроскопски описује кретање наелектрисаних честица у малој запремини $\mathrm{d}V$:

$$\vec{J} = N\,Q\,\vec{v}$$

где је $N = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}V}$ концентрација наелектрисаних честица у запремини, односно број наелектрисаних честица n у јединици запремине, $\overline{\vec{v}}$ средња макроскопска брзина усмереног кретања тих честица, а Q наелектрисање једне честице [3]. Јачина струје је, по дефиницији, једнака флуксу вектора густине струје кроз неку површ S:

$$i \stackrel{\text{def}}{=} \int_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S N\,Q\,\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S} = N\,Q\,\int_S \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S}.$$

Како је запремински проток неких честица кроз посматрану површ претходно изведен као $\dot{V} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \int_S \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S}$ (једначина (1)), заменом ове једначине у претходни израз добија се:

$$i = N\,Q\,\int_S \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S} = N\,Q\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}V}\,Q\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}n\,Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

Дакле, важи следеће:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \int_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} \qquad (2)$$

Из једначине (1) видимо да је запремински проток нестишљивог флуида једнак флуксу вектора брзине, а из једначине (2) да је јачина струје једнака флуксу вектора густине струје. Исти облик математичких једначина указује на аналогију између запреминског протока $\dot{V} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ и јачине струје $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, као и аналогију између запремине нестишљивог флуида V и количине наелектрисања q.

Овакви закључци аналогија између физичких величина и формула биће приказани у табелама ради прегледности:

Струјно поље нестишљивог флуида	**Електромагнетно поље**
$V[\mathrm{m}^3]$	$q[\mathrm{C}]$
$\dot{V}[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$	$i[\mathrm{A}]$

2.2. Једначина континуитета у пољу

Посматрајмо струјање нестишљивог флуида кроз затворену површ у простору. Под претпоставком да у тој површи нема извора ни понора флуида, флукс вектора брзине флуида кроз ту затворену површ биће једнак нули:

$$\oint_S \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Ово значи да ће запремински проток кроз ту затворену површ бити једнак нули:

$$\dot{V} = 0,$$

што се добија као резултат једначине континуитета. Дакле, запремина нестишљивог флуида у тој затвореној површи је константна:

$$V = const,$$

односно запремина флуида који у ту затворену површ уђе у јединици времена једнака је запремини флуида која у јединици времена из ње изађе.

Слично важи и за протицање наелектрисања у простору. Ако посматрамо затворену површ у простору кроз коју протиче наелектрисање и ако унутар ње не постоји збијање наелектрисања (нема „гомилања“ или „разређивања“ наелектрисања), а нема ни извора и понора, флукс вектора густине струје кроз ту затворену површ биће нула:

$$\oint_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Односно укупна јачина струје кроз ту затворену површ једнака је нули:

$$i = 0.$$

Значи, количина наелектрисања које у ту површ уђе за време $\mathrm{d}t$ биће једнака количини наелектрисања које из ње изађе за исто то време.

Дакле, једначина континуитета важи и у струјном пољу нестишљивог флуида и у електромагнетном пољу.

Струјно поље нестишљивог флуида	Електромагнетно поље
$\dot{V} = 0$	$i = 0$
$V = const.$	$q = const.$

3. АНАЛОГИЈЕ ИЗМЕЂУ ФИЗИЧКИХ ВЕЛИЧИНА И ЈЕДНАЧИНА У ЕЛЕКТРИЧНОМ КОЛУ И ЦЕВОВОДУ

3.1. Апроксимације теорије електричних кола и њихове хидрауличке аналогије

Теорија електричних кола је дисциплина електротехнике која се заснива на поступку идеализације (апстракције). Она се бави електричним колима, односно њиховим моделима – идеализованим представама реалних склопова који постоје у стварном свету [2].

Теорија електричних кола уводи бројне полазне претпоставке које су заправо апстракције и идеализације, а које понекад могу бити у супротности са основним законима физике. Једна таква идеализација јесте та да не постоји електромагнетно поље ван елемената кола, поље је сконцентрисано само у тим елементима. Ово је физички нетачно – ако не постоји промењљиво електромагнетно поље, према Максвеловим законима важи да је рад електричног поља при преносу елементарног тачкастог наелектрисања између две тачке исти, без обзира на путању по којој се он рачуна (поглавље 3.4). На тај начин, под наведеном претпоставком теорије кола, ако се напон на неком елементу рачуна по путањи која иде кроз тај елемент, тај напон може бити различит од нуле. Међутим, ако се тај исти напон рачуна по некој путањи ван тог елемента, где нема поља, тај напон ће бити нула. Дакле, добили смо контрадикцију са основним законом. Међутим, неопходно је увести ову претпоставку јер је без ње тешко решавати коло. Ова претпоставка је ипак прихватљива због тога што су у пракси јачине поља ван елемената, посебно на великим удаљеностима од њих, у другим елементима кола често занемарљиве. Ако пак у неким реалним случајевима ова претпоставка не важи, односно када се утицај једног елемента на други не може занемарити, на пример због промењљивог електромагнетног поља и индукције, онда се ти елементи моделују другачије: додавањем нових, поново апстрактних елемената у модел кола који се описују једначинама које добро апроксимирају тај међусобни утицај, а које следе из Максвелових једначина.

У хидрауличким колима – цевоводима, свакако ће важити чињеница да нема струјног поља флуида ван цеви цевовода, јер се флуид налази само у цевима и нема га ван њих.

Друга апроксимација коју теорија електричних кола уводи јесте та да ни на једном идеализованом елементу у колу нема збијања наелектрисања, односно „гомилања“ ни

„разређивања“[1]. Захваљујући овој претпоставци, важиће једначина континуитета у колу (поглавље 3.2).

Еквивалент овој претпоставци у пољу флуида била би претпоставка да је флуид који протиче кроз цевовод увек нестишљив. Механика флуида се бави и стишљивим и нестишљивим флуидима, али се овај рад ограничава само на струјања нестишљивих флуида ради успостављања аналогија.

Следећа апроксимација коју теорија електричних кола уводи је идеализација проводника. Проводник је у теорији кола једнодимензионалан елемент са два краја између којих може протицати струја, а на којима је потенцијал исти. Прва идеализација која је овде уведена је да је проводник једнодимензионалан елемент, тј. да нема дебљину већ само дужину. Ова идеализација је прихватљива за све реалне проводнике код којих је дебљина занемарљива у односу на дужину. Друга идеализација је да је потенцијал на крајевима проводника исти. То није случај код реалних проводника, али је код неких разлика потенцијала на крајевима занемарљиво мала у односу на остатак кола. Ако разлика потенцијала на крајевима проводника ипак није занемарљива, тај проводник се може моделовати новим, идеалним проводником за који дата апроксимација важи, и отпорником који ово његово својство боље описује.

У хидрауличком цевоводу, хоризонтална цев константног пречника на чијим се крајевима притисци разликују занемарљиво мало у односу на остатак цевовода, може се апроксимирати идеалном цеви (трење се занемарује) са разликом притисака на крајевима једнаком нули. Цеви код којих разлика притисака на крајевима пак није занемарљива, могу се моделовати једном идеалном цеви између чијих крајева не постоји пад притиска и „отпорником“ који боље апроксимира ово својство цеви.

Према уведеним апроксимацијама за електрична кола, између елемената нема међусобног утицаја осим преко проводника којим су везани и нема електричног поља ван елемената. Зато је у теорији кола битна само топологија кола, односно начин на који су елементи повезани, а не његова геометрија односно распоред елемената у простору.

Гравитационо поље у хидрауличким колима утиче на коло, па је геометрија кола битна. Међутим, утицај гравитационог поља на струјање у цевоводу се може моделовати пумпом која прави промену притиска која је једнака промени притиска коју би иначе направило гравитационо поље, и која „гура“ флуид у смеру у ком ради гравитационо поље. Тако се коло може посматрати као „хоризонтално“. На овај начин се и затворени систем хидрауличких цевовода може трансформисати у идеализовано коло елемената чија геометрија више није битна.

Пошто ће се овај рад надаље превасходно бавити електричним колима и хидрауличким цевоводима као идеализованим моделима реалних система, претпоставиће се да све наведене апроксимације важе.

3.2. Једначина континуитета у електричном колу и цевоводу

Раније је показано да једначина континуитета важи за кретање нестишљивог флуида, односно наелектрисања у простору. Исто ће важити и када простор ограничимо на електрично коло једносмерне струје, односно хидраулички цевовод.

[1] На плочама кондензатора има нагомилавања наелектрисања, али на целом кондензатору као елементу укупно нема вишка или мањка наелектрисања због постулата да су му плоче увек наелектрисане истом количином супротног наелектрисања.

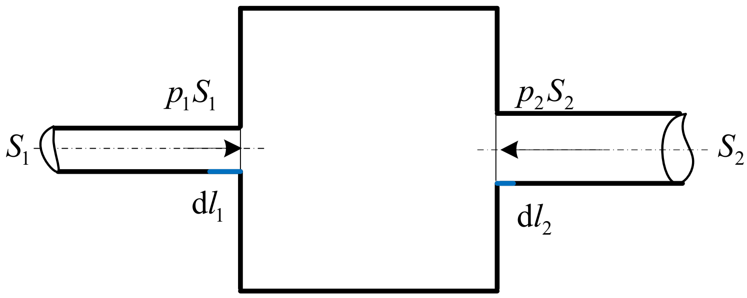
Ово се може доказати на исти начин као и за простор. Ако ограничимо неки део кола (електричног кола или цевовода кроз који протиче нестишљив флуид) неком затвореном површи, флукс вектора густине струје, односно флукс вектора брзине флуида биће једнак нули. Како је проток наелектрисања у електричном колу, као и флуида у цевоводу ограничен на проводнике, односно цеви, јачина струје која улази у тај део електричног кола биће једнака јачини струје која из њега излази, односно проток флуида који у тај део цевовода улази биће једнак протоку флуида који из њега изађе. Овако добијена једначина континуитета у цевоводу је једна од основних једначина које се користе у решавању цевовода

Ако је део електричног кола који је ограничен затвореном површи чвор (и ништа осим њега), важиће да је збир свих јачина струја кроз све проводнике који су повезани у том чвору једнак нули, ако се за све њих узме референтни смер од чвора ка спопља (или за све обрнуто). Овиме се добија Прво Кирхофово правило, једно од два основна правила која се користе у решавању електричних кола. Аналогно важи и за рачву у цевоводу

Цевовод	**Електрично коло**
$\sum_{k=1}^{n} \dot{V}_k = 0$ $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \ldots, \dot{V}_n$ су протоци кроз цеви рачве	$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$ $i_1, i_2, \ldots, i_n$ су струје кроз гране чвора

3.3. Рад, снага, притисак и напон

Нека Слика 2 представља неки елемент хидрауличког цевовода (исто ће важити за све елементе, па за извођење није битно који је то елемент) кроз који протиче нестишљив флуид.



Слика 2

Нека су притисци на улазу, односно излазу из тог елемента p_1, односно p_2, а површине попречног пресека цеви на улазу и излазу S_1 и S_2, респективно. Рад који флуид изврши на том елементу за време $\mathrm{d}t$ једнак је:

$$\mathrm{d}A = p_1\, S_1\, \mathrm{d}l_1 - p_2\, S_2\, \mathrm{d}l_2$$

где су $\mathrm{d}l_1$ и $\mathrm{d}l_2$ путеви које флуид пређе на улазу односно излазу из елемента за време $\mathrm{d}t$. Пошто важи једначина континуитета запреминског протока, важиће:

$$S_1\, \mathrm{d}l_1 = S_2\, \mathrm{d}l_2 = \mathrm{d}V,$$

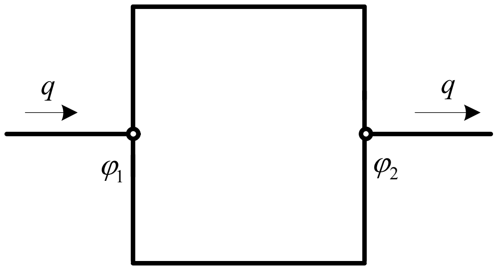
односно:

$$\mathrm{d}A = \Delta p\, \mathrm{d}V. \tag{3}$$

Тако ће снага којом се енергија флуида претвара у неки други облик енергије на датом елементу, или обратно ако је алгебарска вредност негативна, бити:

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dot{V}\ \Delta p.$$

Посматрајмо сада електрично коло. На слици (Слика 3) је приказан неки елемент произвољног кола (исто ће важити за све елементе, па за извођење није битно који је то елемент).



Слика 3

Нека су потенцијали на улазу и излазу из елемента $\varphi 1$ и $\varphi 2$, односно нека је напон на том елементу $u = \varphi 1 - \varphi 2$, а количина наелектрисања које кроз њега пролази q. Рад који електрично поље изврши да би пребацило мало наелектрисање dq од тачке 1 до тачке 2 у бесконачно малом временском периоду $\mathrm{d}t$ биће:

$$\mathrm{d}A = u\ \mathrm{d}q. \tag{4}$$

Снага којом се електрична енергија претвара у неки други облик енергије на датом елементу, или обратно ако је алгебарска вредност негативна, ће бити:

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\ u = i\ u.$$

Ако посматрамо једначине (3) и (4), имајући на уму већ успостављену аналогију између количине наелектрисања q у електричном пољу и запремине V у пољу флуида, можемо уочити сличност између њих. Одавде, можемо успоставити нову аналогију између промене притиска између две тачке у цевоводу Δp и напона између две тачке у електричном колу u.

Цевовод	**Електрично коло**
$\mathrm{d}A = \Delta p\ \mathrm{d}V[\mathrm{J}]$	$\mathrm{d}A = u\ \mathrm{d}q[\mathrm{J}]$
$P = \dot{V}\ \Delta p[\mathrm{W}]$	$P = i\ u[\mathrm{W}]$
$\Delta p[\mathrm{Pa}]$	$u[\mathrm{V}]$

3.4. Друго Кирхофово правило

Пошто је електростатичко поље конзервативно поље, рад који поље изврши да би пребацило јединично наелектрисање из неке тачке у неку референтну тачку може се дефинисати као потенцијал те тачке који зависи само од положаја те тачке (јер је рад исти независно од путање којом то јединично наелектрисање стигне из почетне тачке у референтну).

У колу непроменљиве струје поље није променљиво, па и остале величине нису променљиве у времену. Тако је потенцијал у некој тачки кола непроменљив, као и напон између две тачке у колу (па и на елементима). Због тога ће за сваку затворену контуру у колу важити да је збир напона између прикључака елемената по њој једнак нули, ако се за све елементе узме референтни смер напона као и смер обиласка контуре (или за све обрнуто). На овај начин добија се Друго Кирхофово правило.

У колима променљиве струје електрично поље није конзервативно, па се не могу овако једноставно увести појмови потенцијала и напона. Међутим, да би се олакшало решавање тих кола, претпоставља се да Друго Кирхофово правило и даље важи, што је у великом броју практичних случајева ваљана апроксимација. Тада се напон посматра као величина између прикључака елемента, која помножена са јачином струје даје снагу тог елемента. Међутим, Друго Кирхофово правило неће важити за високофреквентна кола, јер је у њима таласна дужина електромагнетног таласа самерљива са геометријским димензијама кола.

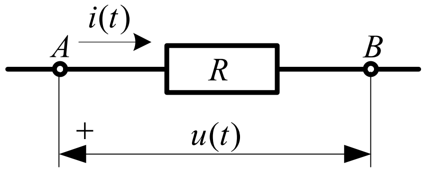
У механици флуида све величине зависе само од положаја и времена, па и притисак. Под претпоставком да је струјање стационарно, притисак ће зависити само од положаја. Зато ће и у цевоводу важити да је збир падова притисака у затвореној контури једнак нули, ако се за све падове притиска узме референтни смер као и смер обиласка контуре (или за све обрнуто).

Цевовод	**Електрично коло**
$\sum_{k=1}^{n} \Delta p_k = 0$ $\Delta p_1, \Delta p_2, \ldots, \Delta p_n$ су падови притиска на елементима затворене контуре	$\sum_{k=1}^{n} u_k = 0$ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ су напони на елементима у затвореној струјној контури

4. ЕЛЕМЕНТИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛА И ЦЕВОВОДА

4.1. Отпорник

Идеалан отпорник (Слика 4) је елемент на коме су напон и струја у линеарној зависности, односно:



Слика 4

$$u = R\,i, R = const. \tag{5}$$

Референтни смер напона, посматран од прикључка вишег према прикључку нижег потенцијала, одговара референтном смеру струје који се узима за овај елемент и ову релацију. Коефицијент пропорционалности R је отпорност отпорника. Она је константа и специфична је за сваки отпорник.

Идеалан „отпорник“ у цевоводу је елемент који моделује губитке услед трења у цеви. Због тога се пад притиска на том елементу рачуна по Дарсијевој формули:

$$\Delta p = (\lambda l/d)(\rho v^2/2) = \frac{8\lambda l\rho}{\pi^2 d^5}\,\dot{V}^2 = C\,\dot{V}^m,$$

где је λ коефицијент трења који зависи од два бездимензијска броја - Рејнолдсовог броја $Re = \frac{vd}{\nu}$ (v је брзина, ν кинематска вискозност флуида, а d пречник цеви) и релативне храпавости.

При томе је референтни смер пада притиска, посматран од краја са вишим према крају са нижим притиском једнак референтном смеру запреминског протока флуида. Пад притиска и запремински проток су тако повезани степеном функцијом, при чему експонент m зависи од режима струјања у цеви. За ламинарно струјање важи да је $\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64\nu}{vd}$, па је тада $m = 1$, што значи:

$$\Delta p = C\,\dot{V}, C = const. \tag{6}$$

C, односно отпорност, је константна која зависи од дужине и пречника цеви и карактеристика флуида.

Из једначина (5) и (6) и претходно успостављених аналогија, јасна је аналогија између идеалног отпорника електричног кола и отпорника хидрауличког цевовода код ламинарног струјања. Због тога што аналогија важи само за ламинарна струјања, у даљем тексту подразумеваће се само таква струјања.

Цевовод	**Струјно коло**
Отпорник: $\Delta p = C\,\dot{V}$	Отпорник: $u = R\,i$

4.2. Идеалан генератор и пумпа

Генератор у струјном колу и пумпа у цевоводу суштински су аналогни елементи јер они доводе неку спољашњу енергију у коло. Генератор у електричном колу претвара неки други облик енергије у електричну енергију, а пумпа у цевоводу претвара неки други облик енергије у механичку енергију флуида. Овај текст ће се бавити идеалним генераторима и пумпама које се користе у теорији кола и успоставити аналогије тамо где је то могуће.

Идеални напонски генератор константног напона је елемент за који важи да је напон између његових прикључака увек константан и не зависи од струје која кроз њега протиче:

$$u = U = const.$$

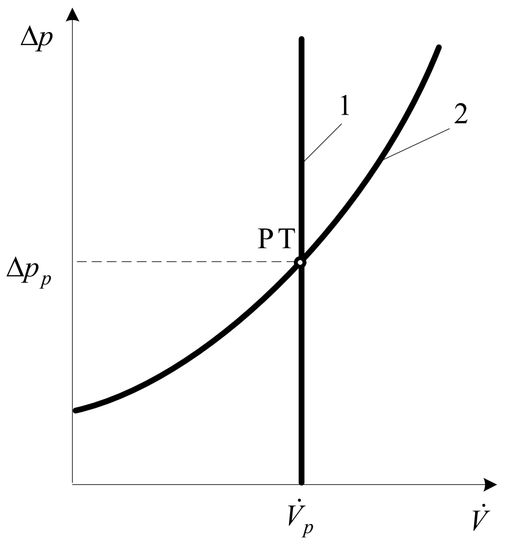
Референтни смер напона узима се од прикључка вишег према прикључку нижег потенцијала. У општем случају, генератор напона не мора имати константан напон у времену, битно је само да је тај напон унапред задат у функцији од времена.

Идеални струјни генератор константне струје је елемент код кога важи да је јачина струје која протиче кроз њега константна без обзира на напон на његовим крајевима:

$$i = I = const.$$

И овде у општем случају генератор струје не мора генерисати константну струју у времену, већ је битно да је та јачина струје задата у функцији од времена.

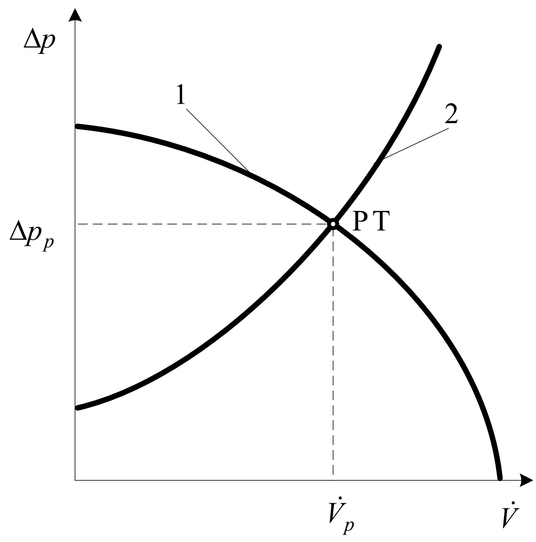
Клипна пумпа је елемент који има константан запремински проток, а разлика притисака на њеним крајевима зависи од карактеристика кола. Однос запреминског протока и пада притиска на клипној пумпи дат је на графику (Слика 5). Права 1 представља карактеристику пумпе, а крива 2 карактеристику кола. У њиховом пресеку добија се радна тачка кола. На ординати се очитава промена притиска на крајевима те пумпе у том цевоводу.



Слика 5

Јасно је да постоји аналогија између идеалне клипне пумпе која одржава константан запремински проток и идеалног струјног генератора константне струје због претходно постављене аналогије између запреминског протока и струје.

Центрифугална пумпа је елемент код кога је зависност између запреминског протока и разлике притисака на њеним крајевима дата на графику (Слика 6). Крива 1 на графику представља карактеристику пумпе. Нека је крива 2 карактеристика неког кола у које се пумпа укључује. У пресеку те две криве добија се радна тачка чије апсциса и ордината одређују запремински проток, односно промену притиска на крајевима те пумпе у том колу, респективно.



Слика 6

У општем случају нема аналогије између центрифугалне пумпе и напонског генератора константног напона. Међутим, у случајевима кад је промена запреминског протока довољно мала, промена у паду притиска је занемарљиво мала, па се може рећи да је пад притиска на пумпи независан од притиска. Према већ успостављеној аналогији између пада притиска и напона, може се успоставити аналогија између центрифугалне пумпе и генератора константног напона.

Цевовод	**Струјно коло**
Центрифугална пумпа: $\Delta p = const.$	Идеални генератор константног напона: $u = U = const.$
Клипна пумпа: $\dot{V} = const.$	Идеални генератор константне струје: $i = I = const.$

Као што је већ речено, гравитационо поље у хидрауличким колима може се моделовати пумпом која прави промену притиска коју би иначе направило гравитационо поље, и која „гура“ флуид у смеру у ком ради гравитационо поље. Тако се онда коло може поставити хоризонтално и више није битна геометрија кола, већ само његова топологија.

4.3. Кондензатор и његова хидрауличка аналогија

Идеалан кондензатор је електрични елемент за који важе три основне полазне претпоставке.

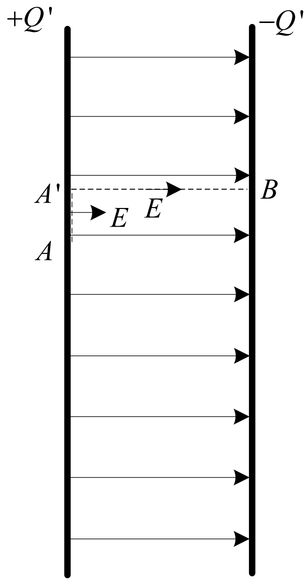
Прва је да између прикључака (електрода) кондензатора нема протока наелектрисања, тј. струје. Ово је прилично логично пошто се између електрода кондензатора (код плочастог кондензатора су то плоче) поставља добар изолатор – диелектрик, кроз који наелектрисање не може проћи (осим у случајевима екстремно високих напона при којима долази до пробоја диелектрика).

Друга полазна претпоставка је да су на прикључцима (електродама) идеалног кондензатора наелектрисања увек $+Q$ и $-Q$, односно наелектрисања исте апсолутне вредности а супротних знакова.

Трећа и последња полазна претпоставка је да је оптерећење кондензатора (апсолутна вредност количине наелектрисања на једној електроди кондензатора) пропорционално напону између прикључака кондензатора, при чему је коефицијент пропорционалности капацитивност кондензатора која је специфична за сваки кондензатор:

$$q = C\,u, C = const.$$

Ово се може и извести на следећи начин. Ако посматрамо плочаст кондензатор у вакууму са слике (Слика 7), чије плоче имају површинске густине наелектрисања $+Q'$ и $-Q'$, и између којих је електрични поље јачине E.



Слика 7

$$E = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

где је ε_0 пермеабилност вакуума. Одредимо сада напон између произвољних тачака А и В које су са различитих плоча. Пошто је напон између две тачке исти без обзира на то по којој се путањи рачуна, може се рачунати по путањи А- А'-В где је А' тачка наспрам тачке В, на супротној плочи од ње. Вектор јачине електричног поља је нормалан на путању АА', па је рад силе електричног поља на тој путањи нула, значи $U_{A'A} = 0$. На путањи А'В вектор јачине електричног поља је истог правца као и путања, па је рад који електрично поље изврши при пребацивању пробног тачкастог наелектрисања Q_0 из тачке А' у тачку В једнак производу количине тог наелектисања и дужине растојања између тачака А и В, односно између плоча кондензатора. Дакле:

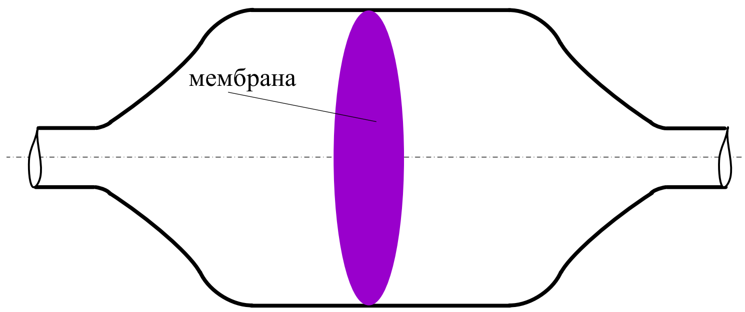
$$U_{AB} = U_{A'B} = \frac{A_{A'B}}{Q_0} = E\,d = \frac{Q' \cdot d}{\varepsilon_0}.$$

Пошто је кондензатор плочаст и плоче су коначне, може се узети да је $Q' = \frac{Q}{S}$, где је Q апсолутна вредност наелектрисања на плочама кондензатора. Када се ово врати у претходну једначину, добија се:

$$U_{AB} = \frac{Q \cdot d}{S \cdot \varepsilon_0} = Q\ C.$$

Дакле, добијена је зависност из последње претпоставке.

Елемент у хидраулици који би био аналоган кондензатору јесте резервоар са непропусном еластичном мембраном на средини која га дели на две коморе испуњене флуидом (Слика 8) [5]. У једну комору може улазити флуид, а из друге излазити.

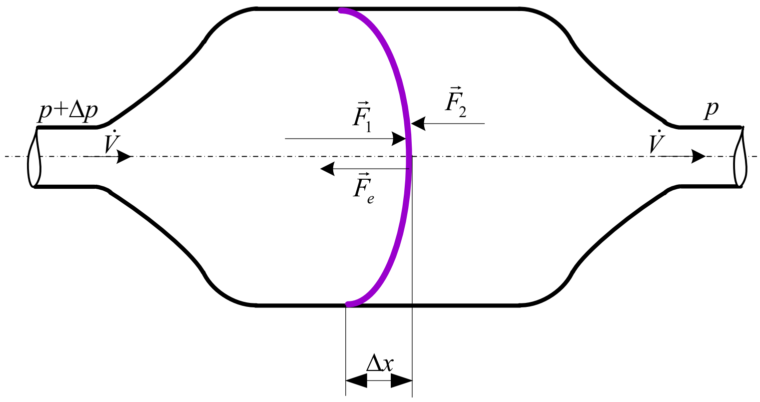


Слика 8

Као и код кондензатора, између комора резервоара неће протицати флуид због постојања саме мембране која их дели и која је непропусна.

За нестишљив флуид важиће да је запремина флуида која уђе у једну комору једнака запремина флуида који изађе из друге јер важи једначина континуитета у резервоару. Због аналогије између запремине и количине наелектрисања, може се видети да је ово аналогно другој полазној претпоставци која се узима за идеални кондензатор.

Као што су код кондензатора оптерећење на њему и напон између његових прикључака пропорционални, и за овакав резервоар може се извести линеарна зависност између пада притиска на крајевима резервоара и запремине која у њега уђе, односно изађе у јединици времена. Посматрајмо резервоар у који улази, односно из ког излази флуид (Слика 9).



Слика 9

Притисак на улазу у резервоар је $p + \Delta p$, а на излазу p. Нека је мембрана померена за мало Δx у односу на свој равнотежни положај. S је површина попречног пресека резервоара, односно површина мембране, а k коефицијент еластичности мембране. Да би систем био у равнотежи мора важити:

$$F_1 = F_e + F_2,$$

односно:

$$(p + \Delta p)\, S = k\, \Delta x + p\, S\ .$$

Скраћивањем се добија:

$$\Delta p\, S = k\, \Delta x,$$

$$\Delta p = \frac{k\Delta x}{S}.$$

Пошто је Δx врло мало, важи $\Delta x = \frac{\Delta V}{S}$. Када се то врати у претходну једначину, добија се:

$$\Delta p = \frac{k}{S}\,\frac{\Delta V}{S} = \frac{k}{S^2}\,\Delta V,$$

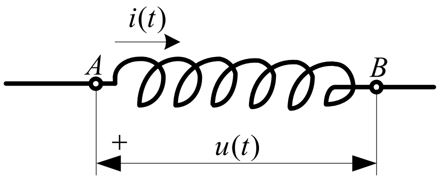
$$\Delta V = \frac{S^2}{k}\,\Delta p = C\,\Delta p, C = const.$$

где је C специфично за сваку мембрану и резервоар.

Цевовод	**Електрично коло**
Резервоар са еластичном мембраном: $\Delta V = \mathrm{C}\,\Delta p$	Кондензатор: $q = C\,u$

4.4. Калем и његова хидрауличка аналогија

Идеални калем (Слика 10) је елемент за који важи да је напон на његовим крајевима пропорционалан промени струје која кроз њега протиче у јединици времена:



Слика 10

$$u = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, L = const.$$

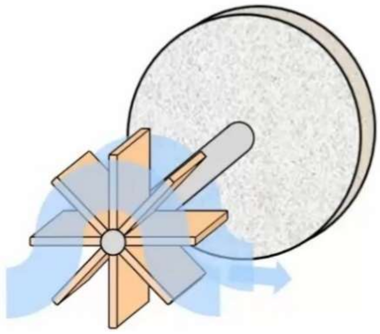
где је L индуктивност калема која је специфична за сваки калем. Ово важи јер је магнетни флукс Φ кроз једну завојницу калема, а тако и кроз цео калем, за непроменљиву геометрију и линеарну средину калема сразмеран јачини струје. Коефицијент те сразмере јесте индуктивност калема L:

$$\Phi = L\,i.$$

Електромоторна сила која се на калему индукује, по Фарадејевом закону електромагнетне индукције једнака је $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$. Та електромоторна сила испољава се као напон на калему, па је тако напон сразмеран промени струје у јединици времена:

$$u = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Хидраулички елемент који је еквивалент калему је турбина, повезана са масивним точком – замајцем, преко чијих лопатица протиче флуид (Слика 11).



Слика 11

Сила флуида која делује на сваку делић површине лопатице, за дату фиксну геометрију, пропорционална је разлици притисака на улазу и излазу из елемента. Тако је и момент силе пропорционалан паду притиска на крајевима елемента:

$$M = K_1 \Delta p,$$

где је K_1 неки коефицијент који зависи од геометрије склопа и који се, теоријски или практично може одредити, али то није неопходно.

Момент силе једнак је производу угаоног убрзања и момента инерције целог ротирајућег склопа:

$$M = \alpha\, I, \tag{7}$$

а угаоно убрзање једнако је промени угаоне брзине кроз време:

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

Запремински проток је пропорцијалан брзини ротације, па и угаоној брзини елемента:

$$\dot{V} = K_2 \omega,$$

где је K_2 коефицијент пропорционалности који се исто може некако одредити, али то није битно за ово извођење. Када се све ово замени у једначину (7), добија се:

$$K_1 \cdot \Delta p = K_2 \frac{\mathrm{d}\dot{V}}{\mathrm{d}t} I,$$

$$\Delta p = \frac{K_2\, I}{K_1} \frac{\mathrm{d}\dot{V}}{\mathrm{d}t},$$

$$\Delta p = K_3 \frac{\mathrm{d}\dot{V}}{\mathrm{d}t}.$$

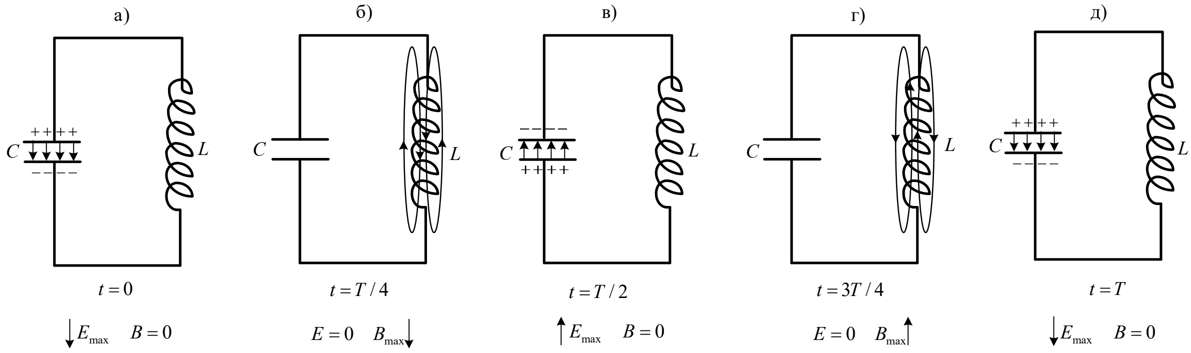
Дакле, на овом елементу важи линеарна зависност пада притиска између крајева елемента и промене запреминског протока у времену. Пошто су разлике притисака на крајевима елемента и напона, као и запремински проток и струја аналогни, ова особина је у потпуности аналогна са претходно наведеном особином калема, што јасно приказује аналогију између ова два елемента.

Цевовод	**Електрично коло**
Турбина са замајцем: $\Delta p = K\, \frac{\mathrm{d}\dot{V}}{\mathrm{d}t}$	Калем: $u = L\, \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

5. АНАЛОГИЈЕ ИЗМЕЂУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛА И ЦЕВОВОДА

5.1. $L-C$ коло и његова хидрауличка аналогија

На слици 12а приказано је $L-C$ коло. Кондензатор је пре повезивања са калемом „напуњен“ до неког оптерећења односно напона [4].



Слика 12

Када се кондензатор повеже са калемом, кроз коло креће да тече струја пражњења кондензатора (јер је у почетку напон на калему нула, па се он понаша као кратак спој). У калему долази до појаве магнетног поља, односно промене магнетног флукса обухваћеног њиме. То ће проузроковати индуковање струје самоиндукције, напон на калему ће се мењати сразмерно са променом струје у колу, а тај напон мењаће и струју пражњења кондензатора. Енергија ће са кондензатора прелазити на калем, све док се кондензатор не испразни и сва енергија пређе на калем (Слика 12б).

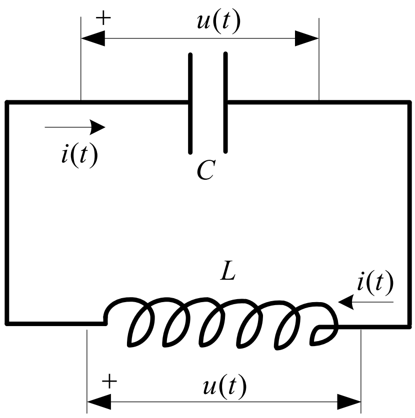
Када се кондензатор испразни неће више бити разлике потенцијала, па и струја престаје да протиче кроз калем. Због тога долази до појаве индукције на калему, која има исти смер као и пре потпуног разелектрисавања плоча кондензатора. Тако се на плочама кондензатора поново нагомилава наелектрисање и енергија магнетног поља трансформише се у енергију електричног поља, све док сва енергија са калема пређе на кондензатор (Слика 12в).

Сада је кондензатор поново наелектрисан до исте вредност напона као и на почетку, па он поново почиње да се празни. Међутим, сада је смер струје пражњења супротан у односу на струју пражњења у почетном тренутку, када су повезани кондензатор и калем. Енергија електричног поља у кондензатору поново се трансформише у енергију магнетног поља у калему, све док се кондензатор не испразни и његова целокупна енергија не пређе на калем (Слика 12г).

Пошто сада поново нема разлике потенцијала на крајевима кондензатора, у калему долази до самоиндукције, па се кондензатор поново пуни. Енергија магнетног поља опет прелази у енергију електричног поља кондензатора (Слика 12д).

Сада је стање у колу исто као и на почетку, након повезивања кондензатора и калема, па се овај процес поново периодично одвија.

Иако је према овоме већ интуитивно јасно да ће ово бити осцилаторно коло, то се може и математички доказати. Слика 13 приказује произвољан тренутак након повезивања кондензатора и калема.



Слика 13

Јачина струје у колу, због једначине односа количине наелектрисања и напона на кондензатору биће једнака:

$$i(t) = C\ \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Напон на кондензатору једнак је напону на калему који је:

$$u(t) = -L\ \frac{di(t)}{dt}.$$

Напон је негативног знака јер због изабраног референтног смера струја на калему иде од његовог – до његовог + краја. Када се ова једначина замени у претходну једначину струје у колу, добија се:

$$i(t) = -L\ C\ \frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

Дакле, добија се да је струја пропорционална свом другом изводу. Премештањем десне стране једначине на леву, добијамо следећи облик ове једначине:

$$L\ C\ \frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + i(t) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\ i(t) = 0. \qquad (5)$$

Дакле, добија се диференцијална једначина. Посматрајмо сада произвољну осцилаторну функцију $f(t)$:

$$f(t) = A\ \sin(\omega t),$$

Њен први извод биће:

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = A\ \omega\ \cos(\omega t),$$

а други:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} = -A\ \omega^2\ \sin(\omega t) = -\omega^2\ f(t).$$

Односно:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\ f(t) = 0. \qquad (6)$$

Јасно се види математичка сличност између ове једначине и претходне једначине (5). Значи, једно решење једначине (5), а математиком која се не учи у средњој школи може се показати и да је једино, је да је јачина струја у $L - C$ колу заправо осцилаторна функција:

$$i(t) = I_0 \sin(\omega t),$$

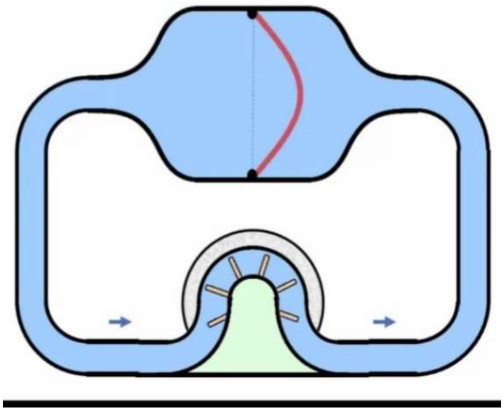
Где је I_0 амплитуда која зависи од почетних услова у колу, а ω сопствена угаона фреквенција кола. Према једначинама (5) и (6), та угаона фреквенција биће:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Период ових осцилација једнак је:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

У хидраулици, склоп који би био аналоган овом осцилаторном колу је хидраулично коло које се састоји из кондензатору и калему аналогних хидрауличких елемената – резервоар са мембраном и турбина са замајцем (Слика 14). Пре повезивања са турбином, направљен је пад притиска на крајевима резервоара, односно мембрана је измештена из равнотежног положаја.



Слика 14

Интуитивно је јасно да ће ово коло, као и $L - C$ коло, бити осцилаторно. Због успостављених аналогија између калема и турбине са замајцем, кондензатора и резервоара са мембраном, струје и запреминског протока и напона и пада притиска на елементу, доказивање да овај систем осцилује у потпуности је аналогно као код $L - C$ кола. На овај начин добија се да запремински проток осцилује:

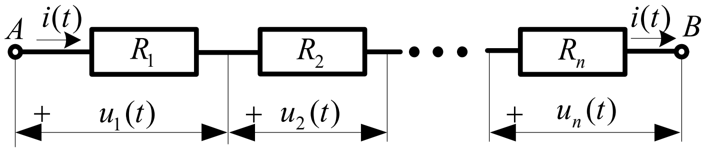
$$\dot{V}(t) = \dot{V}_0 \sin(\omega t),$$

где је $\dot{V}_0$ амплитуда која зависи од почетних услова у колу, а ω сопствена угаона фреквенција ових осцилација, која је једнака реципрочној вредности корена из производа константи резервоара и турбине.

Цевовод	**Електрично коло**
Веза турбине са замајцем и резервоара са мембраном: $\dot{V}(t) = \dot{V}_0 \sin(\omega t)$ $\Delta p(t) = \Delta p_0 \cos(\omega t)$	$L - C$ коло: $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$ $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$

5.2. Редна и паралелна веза елемената у колу

Слика 15 приказује редну везу n отпорника у електричном колу.



Слика 15

Иста јачина струје пролази кроз све отпорнике, а напон на крајевима гране AB једнак је збиру појединачних напона отпорника. Нека су ти појединачни напони на отпорницима редом u_1, u_2,…, u_n а отпорности отпорника R_1, R_2,…, R_n. Ради једноставнијег решавања кола ови отпорници могу се заменити једним тзв. *еквивалентним* отпорником који не мења услове у колу када се у њега прикључи – за исту струју даје исти напон као и ових n редно везаних отпорника. Значи, напон на његовим крајевима мора бити једнак напону између крајева гране AB, односно збиру појединачних напона на отпорницима:

$$u_e = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

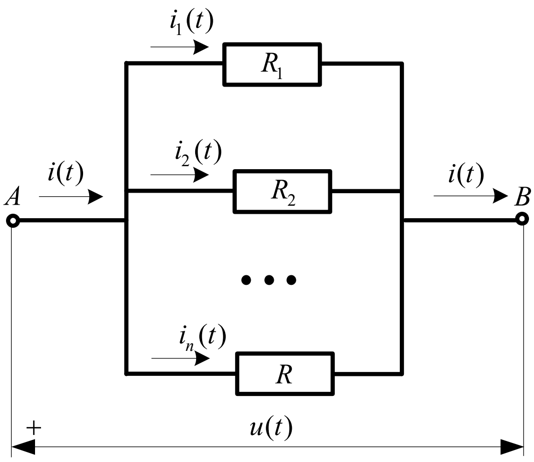
Пошто за отпорник важи $u = R\ i$, заменом у претходну једначину добија се:

$$R_e\ i = R_1\ i + R_2\ i + \cdots + R_n\ i.$$

Када се једначина подели са јачином струје i, добија се отпорност еквивалентног отпорника:

$$R_e = R_1 + R_2 + \cdots + R_n.$$

Слика 16 приказује паралелну везу n отпорника:



Слика 16

Напон на свим отпорницима је исти и једнак напону између тачака A B, а струја која улази кроз чвор једнака је збиру појединачних струја које пролазе кроз отпорнике. Нека су те струје редом i_1, i_2,…, i_n а отпори отпорника R_1, R_2,…, R_n. И овде се ови отпорници могу заменити једним еквивалентним отпорником који не мења услове у колу када се у њега прикључи, односно за исту струју напон на њему исти као и за паралелну везу ових n отпорника. Дакле, струја на еквивалентном отпорнику биће једнака збиру струја које пролазе кроз отпорнике:

$$i_e = i_1 + i_2 + \cdots + i_n.$$

Заменом у $i = \frac{u}{R}$ једначину, добија се:

$$\frac{u}{R_e} = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + \cdots + \frac{u}{R_n}.$$

Када се све подели са u, добија се отпорност еквивалентног отпорника:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}.$$

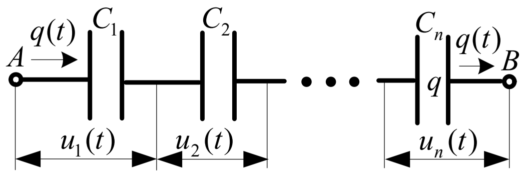
Исто ће важити и за редне односно паралелне „отпорнике“ у хидрауличком цевоводу. Пошто су већ успостављене аналогије између отпорника у струјном колу и хидрауличком цевоводу, напона и пада притиска и струје и запреминског протока, на исти начин се добијају еквивалентна хидрауличка отпорност за редну везу:

$$C_e = C_1 + C_2 + \cdots + C_n,$$

а за паралелну:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}.$$

Слика 17 приказује редну n везу кондензатора.



Слика 17

Ако су кондензатори пре убацивања у коло били неоптерећени, количина наелектрисања на свим кондензаторима биће иста. Нека су напони на кондензаторима редом u_1, u_2,…, u_n, а њихове капацитивности C_1, C_2,…, C_n. Напон између крајева гране AB једнак је збиру појединачних напона на кондензаторима. Сви кондензатори у овој грани могу се заменити једним кондензатором, еквивалентне капацитивности C_e, која за исту количину наелектрисања има исти напон на крајевима као и на крајевима редне везе ових n кондензатора. Дакле, напон на крајевима еквивалентног кондензатора мора бити једнак напону између тачака A и B, односно збиру појединачних напона на кондензаторима:

$$u_e = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

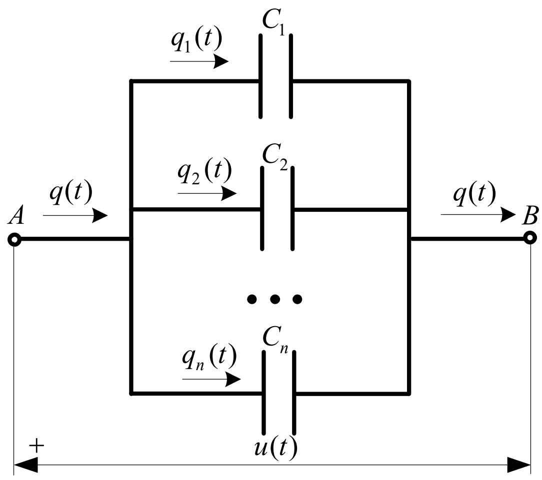
Како за кондензатор важи $q = C\,u$, а наелектрисање на свим кондензаторима је исто, важи:

$$\frac{q}{C_e} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \cdots + \frac{q}{C_n}.$$

Када се ова једначина подели са q, добија се капацитивност еквивалентног кондензатора:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}.$$

Паралелна веза n кондензатора приказује Слика 18.



Слика 18

Напони на свим кондензаторима су једнаки, и једнаки су напону између тачака A и B. Капацитивности кондензатора су редом C_1, C_2,..., C_n, а количине наелектрисања на њима q_1, q_2,..., q_n. Овај систем кондензатора може се заменити једним еквивалентним кондензатором који не мењам услове у колу, то јест за исту количину наелектрисања исти је напон на његовим крајевима као и за паралелну везу ових кондензатора. Количина наелектрисања на том еквивалентном кондензатору биће једнака количини наелектрисања која улази кроз прикључак A односно излази из B, дакле биће једнака збиру количине наелектрисања на кондензаторима из паралелне везе:

$$q_e = q_1 + q_2 + \cdots + q_n.$$

Када се у ову једначину убаци $q = C\,u$, добија се:

$$C_e\,u = C_1\,u + C_2\,u + \cdots + C_n\,u.$$

Дељењем ове једначине са u, добија се еквивалентна капацитивност:

$$C_e = C_1 + C_2 + \cdots + C_n.$$

Исто важи и за редне односно паралелне везе резервоара са мембраном. Већ су успостављене аналогије између количине наелектрисања и запремине, напона и пада притиска на елементу, као и између кондензатора и резервоара са мембраном. Због тога је извођење еквивалентне константе C за резервоар исто као и за кондензатор, па се за редну везу добија:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n},$$

а за паралелну:

$$C_e = C_1 + C_2 + \cdots + C_n.$$

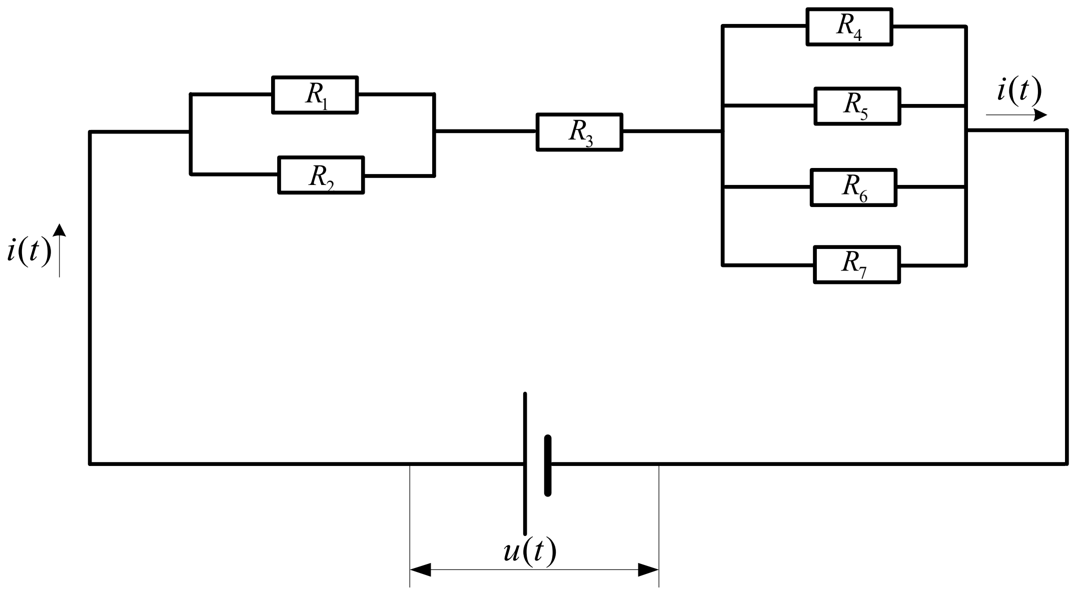
Цевовод	**Електрично коло**
Редна веза отпорника: $C_e = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$	Редна веза отпорника: $R_e = R_1 + R_2 + \cdots + R_n.$
Паралелна веза отпорника: $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$	Паралелна веза отпорника: $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$

Редна веза резервоара са мембраном: $$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$	Редна веза кондензатора: $$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$
Паралелна веза резервоара са мембраном: $$C_e = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$	Паралелна веза кондензатора: $$C_e = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

5.3. Примери решавања кола и цевовода

У овом поглављу, на једноставном примеру биће приказан поступак решавања кола и како се аналогије између електричних кола и цевовода примењују у решавању кола односно цевовода.

Слика 19 приказује пример електричног кола. Нека су познате отпорности отпорника, R_1, R_2,…, R_7 и струја I, а напон U на генератору треба да се израчуна.



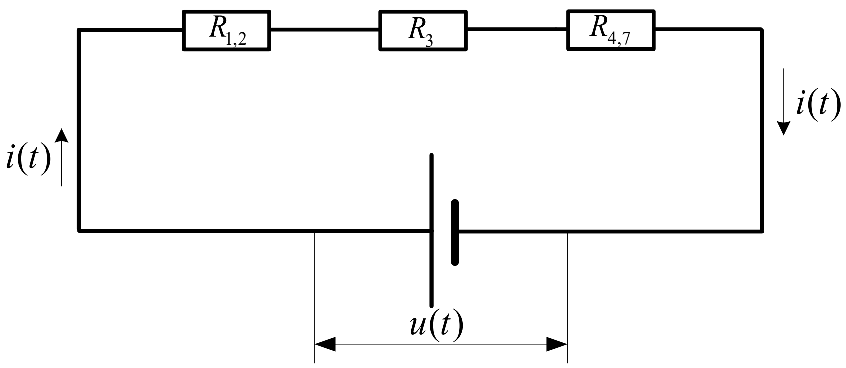
Слика 19

Пошто су R_1 и R_2 у паралелној вези, као и R_4, R_5, R_6 и R_7 они се могу заменити отпорницима еквивалентних отпорности $R_{1,2}$ $R_{4,7}$, које су једнаке:

$$R_{1,2} = \frac{R_1\,R_2}{R_1+R_2},$$

$$\frac{1}{R_{4,7}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}.$$

Сада у колу имамо редну везу три отпорника отпорности $R_{1,2}$, R_3 и $R_{4,7}$:

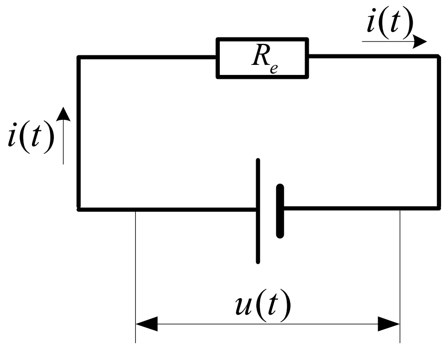


Слика 20

И они се могу заменити еквивалентним отпорником отпорности R:

$$R_e = R_{1,2} + R_3 + R_{4,7}.$$

Сада коло изгледа овако:

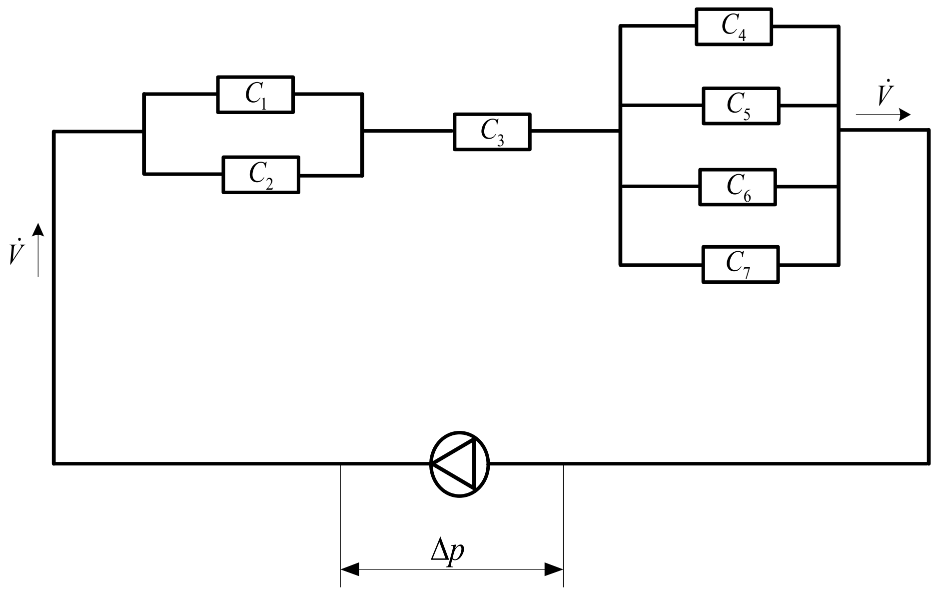


Слика 21

Пошто су струја I и отпорност еквивалентног отпорника R_e познати, напон на генератору се лако израчунава:

$$U = R_e\, I = (R_{1,2} + R_3 + R_{4,7}) \cdot I.$$

На слици (Слика 22) приказан је цевовод. Ако су познате појединачне отпорности цеви C_1, C_2,…,C_7 (које ћемо моделовати „отпорницима“) и запремински проток пумпе $\dot{V}$, колика ће бити разлика притисака Δp на крајевима пумпе?



Слика 22

Аналогије између одређених физичких величина у хидраулици и електрици су већ установљене, као и аналогије између елемената електричних кола и цевовода. Тако, ово коло можемо пребацити у електрично и тако га решити, а затим решење применити на почетни цевовод. Аналогно електрично коло овом цевоводу било би управо електрично коло из претходног задатка (Слика 19). Решење ће онда бити аналогно решењу претходног кола, дакле:

$$\Delta p = C\,\dot{V} = \left(\frac{C_1\,C_2}{C_1+C_2} + C_3 + \frac{1}{\frac{1}{C_4}+\frac{1}{C_5}+\frac{1}{C_6}+\frac{1}{C_7}}\right)\dot{V}.$$

6. ЗАКЉУЧАК

У овом раду разматране су аналогије које важе између струјног поља флуида и цевовода, и електромагнетног поља и струјног кола. Изведене су аналогије између запремине и количине наелектрисања, као и запреминског протока и јачине струје у пољу и између пада притиска и напона у цевоводу, односно колу. Показано је да неке основне једначине попут једначине континуитета, Првог и Другог Кирхофовог закона важе како у цевоводу, тако и у струјном колу. Изведене су аналогије између одређених елемената цевовода односно струјног кола.

Ове аналогије указују на суштински исту природу појава на основу које се закључци у једној области могу применити на њој аналогну област.

7. ЛИТЕРАТУРА

[1] Светислав М. Чантрак, „Хидродинамика“, Машински факултет у Београду, 2012.

[2] Драган Милићев, „Зашто са кондензаторима треба бити пажљив“, 2016, http://afrodita.rcub.bg.ac.rs/~dmilicev/publishing/DMilicev_O_kondenzatorima.pdf

[3] Антоније Р. Ђорђевић, „Основи електротехнике, 2. део, Сталне струје“, Електротехнички факултет, Академска мисао, Београд, 2016.

[4] Наташа Каделбург и Весна Рапаић, „Физика за трећи разред Математичке гимназије“, Круг Београд, 2011.

[5] http://ataridogdaze.com/science/hydraulic/index.html#intro